

Approximation de la solution d'une EDO

$$\begin{cases} Y'(t) = f(Y(t), t) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases} \quad (*)$$

on cherche à donner une approximation de Y sur $[0, T]$, $T > 0$

on discrétise $[0, T]$ en N sous-intervalles $[t_n, t_{n+1}]$ où $t_n = nh$, avec h le pas de la discrétisation

on intègre (*) sur $[t_n, t_{n+1}]$:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} Y'(t) dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(Y(t), t) dt$$
$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} Y'(t) dt = Y(t_{n+1}) - Y(t_n)$$

on se donne Y_n une approximation $Y(t_n)$, et cherche $Y_{n+1} \approx Y(t_{n+1})$ à partir de Y_n et de t_n

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(Y(t), t) dt &\approx (t_{n+1} - t_n) f(Y(t_n), t_n) \approx h f(Y_n, t_n) : \text{rect. gauche} \\ \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(Y(t), t) dt &\approx (t_{n+1} - t_n) f(Y(t_{n+1}), t_{n+1}) \approx h f(Y_{n+1}, t_{n+1}) : \text{rect. droite} \\ \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(Y(t), t) dt &\approx (t_{n+1} - t_n) \frac{1}{2} [f(Y(t_n), t_n) + f(Y(t_{n+1}), t_{n+1})] \\ &\approx \frac{h}{2} [f(Y_n, t_n) + f(Y_{n+1}, t_{n+1})] : \text{trapèzes} \end{aligned}$$

méthode intégration	méthode EDO	formule EDO approchée
rectangles à gauche	Euler explicite	$Y_{n+1} = Y_n + h f(Y_n, t_n)$
rectangles à droite	Euler implicite	$Y_{n+1} = Y_n + h f(Y_{n+1}, t_{n+1})$
trapèzes	trapèzes	$Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{2} [f(Y_n, t_n) + f(Y_{n+1}, t_{n+1})]$